שיעור אחד-עשר

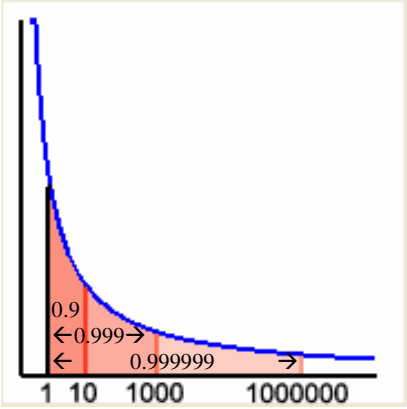
פרק 10: אינטגרלים מוכללים, כלל לופיטל

מבוא

בשיעור זה נכליל את מושג האינטגרל המסוים, ונעסוק באינטגרלים אשר קטע האינטגרציה שלהם הוא אינסופי. בנוסף נכיר שיטה חביבה ושימושית בחישובי גבולות: כלל לופיטל.

האינטגרל המוכלל

עד עכשיו עמדו על פשר האינטגרל המסוים של פונקציה בקטע סגור סופי [a,b] כמייצג את השטח נטו הכלוא מתחת לגרף הפונקציה ומעל ציר x בין a ל- b.



למשל, עבור $f(x)=\frac{1}{x^2}$ האינטגרל המסוים $\int_1^{10}\frac{1}{x^2}dx$ מייצג את השטח שכלוא מתחת לגרף הפונקציה בין 1 ל- 10.

אנו יודעים לחשב שטח זה ע"י המשפט היסודי הראשון:

הקדומה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ היא $F(x)=-\frac{1}{x}$ ולכן

$$\int_1^{10}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^{10}=-\frac{1}{10}-(-1)=0.9$$

באופן דומה אם נחשב את השטח שכלוא מתחת לגרף הפונ' $f(x)=\frac{1}{x^2}$ בין 1 ל- 1000 נקבל:

$$\int_1^{1000}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^{1000}=-\frac{1}{1000}-(-1)=0.999$$

ובין 1 למיליון:

$$\int_1^{1000000}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^{1000000}=-\frac{1}{1000000}-(-1)=0.999999$$

אנו מבחינים כאן בהתנהגות מעניינת: כאשר אנו לוקחים ומגדילים מאד את קטע האינטגרציה, השטח מתחת לגרף לא גדל בצורה חזקה. גם אם היינו מחשבים את השטח בין 1 למיליארד מיליארדים הינו מקבלים שטח של 0.9999…999 ובאופן כללי, ככל שנגדיל את הגבול העליון של האינטגרל, השטח מתחת לגרף ילך ויתקרב ל- 1.

מפתה אם כן להגיד כי השטח שכלוא מתחת לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ <u>בין 1 לאינסוף</u> הוא 1.

לאחר הדיון המקדים, אנו מוכנים להגדיר את **האינטגרל המוכלל** כפי שמוגדר ב**יחידות הלימוד בעמודים 580-579.**

$\int_1^{\infty}f(x)dx$ - "האינטגרל מ- 1 עד אינסוף של הפונקציה f(x)" –

הוא הכללה של האינטגרל המסוים עבור קטע אינטגרציה אינסופי - ומוגדר ע"י:

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\left(\int_1^{t}f(x)dx\right)$$

נתעכב עוד קצת על ההגדרה. ראשית נשים לב כי הביטוי הרשום בתוך הגבול הוא <u>ביטוי התלוי במשתנה t</u> (ולא x). את הפונקציה שלנו אמנם אנו מסמנים כ- $f(x)$ אך הביטוי $\int_1^t f(x)dx$ הוא אינטגרל מסוים של הפונקציה הזו שגבולותיו הם 1 ו- t, כלומר הוא מייצג את השטח הכלוא מתחת לגרף של $f(x)$ בין 1 ל- t. לכל t נתון, השטח הזה הוא איזשהו מספר קבוע, ולכן בסה"כ נקבל ביטוי המביע כתלות בבחירה של הגבול העליון t את השטח הכלוא מתחת לגרף של $f(x)$ בין 1 ל- t. כדי לקבל את ביטוי זה פשוט נחשב את האינטגרל המסוים כרגיל, אלא שכעת במקום להציב מספרים כגבול העליון והתחתון נציב את t ואת 1. כך למשל עבור אותה $f(x)=\frac{1}{x^2}$:

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = -\frac{1}{t}-(-1) = 1-\frac{1}{t}$$

קיבלנו נוסחה המחשבת לנו, לכל t, מהו השטח מתחת לגרף של $f(x)$ בין 1 ל- t. כך אם נרצה כעת לחשב את השטח מתחת לגרף f בין 1 ל- 1000 נציב t=1000 בנוסחה שקיבלנו ונקבל כי השטח הוא $1-\frac{1}{1000}=0.999$ (בזהה לחישוב הקודם).

כעת על מנת לחשב מהו האינטגרל האינסופי אנו רוצים "להציב" בתור את הערך של t את אינסוף. כמובן שאין כזה דבר להציב אינסוף – בצורה פורמלית – אלא זהו תהליך שנבצע ע"י גבול: נראה לאן שואף הביטוי כש- t <u>שואף לאינסוף</u>:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1$$

כלומר בסה"כ קיבלנו:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\int_1^t \frac{1}{x^2}dx\right) = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1$$

וחישבנו בהצלחה את האינטגרל המוכלל.

נסכם, כי הדרך לחשב אינטגרל מוכלל:

1) נרשום את הגבול המגדיר את האינטגרל: $\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\left(\int_1^t f(x)dx\right)$
2) נחשב את האינטגרל המסוים בתוך הגבול, עם הגבולות 1 ו- t. נקבל ביטוי במשתנה t.
3) נחליף את האינטגרל הרשום בגבול בביטוי שקיבלנו – ונקבל בעיה של חישוב גבול במשתנה t. תוצאת חישוב הגבול היא ערכו של האינטגרל המבוקש.

<u>הערה</u>: בכל ההגדרות, לצורך הפשטות, אנו רושמים בגבול תחתון של האינטגרל 1, אך כל ההגדרות והמשפטים תקפים גם לגבול תחתון שהוא מספר אחר כלשהו.

אינטגרל מתכנס ואינטגרל מתבדר

התוצאה שקיבלנו בסעיף הקודם היא מעט מפתיעה. קיבלנו תוצאה סופית המייצגת שטח של אובייקט "אינסופי": השטח מתחת לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ בין 1 לאינסוף.

כיצד אם כך אפשר להסביר זאת בכל זאת? ובכן, הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ שואפת לאפס כש- x שואף לאינסוף, כך שלמרות שאנו מחשבים את השטח לאורך קטע אינסופי, הרי כיוון שערכי הפונקציה נהיים מאד מאד קטנים עבור ערכי x גדולים, השטח גדל מעט מאד כאשר אנו מגדילים את הגבול העליון של האינטגרל, ומתכנס בסופו של דבר לגבול סופי של 1.

לא תמיד זה יהיה המצב, כפי שתלמד אותנו הדוגמה הבאה:

דוגמה

ננסה לחשב $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$. נעקוב אחרי אותם שלבים.

<u>שלב 1</u>: כתיבת הגבול המגדיר את האינטגרל:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\lim_{t\to\infty}\left(\int_1^t \frac{1}{x}dx\right)$$

<u>שלב 2</u>: חישוב האינטגרל המסוים בתוך הגבול:

הפונקציה הקדומה של $f(x)=\frac{1}{x}$ היא $F(x)=\ln x$ לכן נקבל:

$$\int_1^t \frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^t=\ln t-\ln 1=\ln t$$

<u>שלב 3</u>: הצבת התוצאה וחישוב הגבול במשתנה t

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\lim_{t\to\infty}\left(\int_1^t \frac{1}{x}dx\right)=\lim_{t\to\infty}(\ln t)=\infty$$

■

בניגוד למקרה הקודם של $1/x^2$, ועל אף שגם הפעם הפונקציה שלנו - $1/x$ - שואפת ל- 0 באינסוף, הפעם קיבלנו כי השטח מתחת לגרף הפונקציה בין 1 לאינסוף הוא אינסופי.
כלומר, השאיפה של הפונקציה $f(x)$ ל- 0 באינסוף היא אמנם תנאי <u>הכרחי</u> לכך שנקבל גבול (ולכן שטח) סופי, אך היא <u>אינה</u> תנאי מספיק.

במקרה הראשון, בו הגבול המגדיר את האינטגרל קיים וסופי, נאמר כי האינטגרל **מתכנס**, ואילו במקרה בו הגבול הוא אינסופי או לא קיים, נאמר כי האינטגרל **מתבדר**.

תרגיל

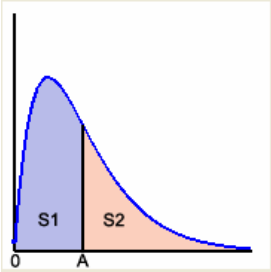
לגבי כל אחד מהאינטגרלים הבאים, בדוק אם האינטגרל מתכנס או מתבדר.
במידה שהוא מתכנס חשב אותו:

א) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ ב) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ג) $\int_1^\infty \arctan(x^7)dx$

בסעיף א' האינטגרל מתכנס וערכו ½ . בסעיף ב' האינטגרל מתבדר.
בסעיף ג' אל תנסו לחשב פונקציה קדומה! נסו לנמק בחדות ובאלגנטיות מדוע האינטגרל מתבדר.

רמז: מהו $\lim_{x\to\infty}\arctan(x^7)$?

תרגיל 1



באיור שלפניך גרף הפונקציה $f(x)=2xe^{-x^2}$.
מצא את A אם נתון כי השטחים המסומנים שווים.

פתרון 1

ניתן לגשת לתרגיל זה בכמה גישות. ניתן לסמן ב- A את הנקודה ולקבל ביטוי, התלוי בפרמטר A,
עבור כל אחד מהשטחים - $\int_0^A 2xe^{-x^2}dx$ ו- $\int_A^\infty 2xe^{-x^2}dx$, ולהשוות בינהם.
אנחנו ננקוט בדרך אחרת, מעט נוחה יותר: נחשב תחילה את כלל השטח מתחת לפונקציה מ- 0 עד אינסוף, $\int_0^\infty 2xe^{-x^2}dx$, ואז נמצא את הנקודה A כך ש- $\int_0^A 2xe^{-x^2}dx$ שווה למחצית מהשטח הכולל.

לעבודה: נחשב את $\int_0^\infty 2xe^{-x^2}dx$ בשלבים הרגילים:

<u>שלב 1</u>: כתיבת הגבול המגדיר את האינטגרל:

$$\int_0^\infty 2xe^{-x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t 2xe^{-x^2}dx\right)$$

<u>שלב 2</u>: חישוב האינטגרל המסוים בתוך הגבול:
הפונקציה הקדומה של $f(x)=2xe^{-x^2}$ היא $F(x)=-e^{-x^2}$ כפי שתראו בתרגילון להלן.

תרגילון חשבו את הפונקציה הקדומה המבוקשת, $\int 2xe^{-x^2}dx$.

מתקשים? *רמז 1: שיטת ההצבה.*
רמז 2: נסו את ההצבה $t=-x^2$.
רמז 3: נסו חזק.
רמז 4: הציצו בחישוב המלא בסיום פתרון התרגיל ■

נמשיך ב<u>שלב 2</u> ונקבל:

$$\int_0^t 2xe^{-x^2}dx=-e^{-x^2}\Big|_0^t=-e^{-t^2}-(-e^0)=1-e^{-t^2}$$

<u>שלב 3</u>: הצבת התוצאה וחישוב הגבול במשתנה t

$$\int_0^\infty 2xe^{-x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t 2xe^{-x^2}dx\right)=\lim_{t\to\infty}\left(1-e^{-t^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^{t^2}}\right)=1$$

כלומר קיבלנו כי סך כל השטח המסומן הוא 1. עלינו למצוא את A כך ש-

$$\int_0^A 2xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}$$

אין לנו צורך בכל חישוב נוסף כדי לדעת מהו $\int_0^A 2xe^{-x^2}dx$ שכן בשלב 2 בפתרון חישבנו את הביטוי הכללי עבור $\int_0^t 2xe^{-x^2}dx$ וקיבלנו כי הוא $1-e^{-t^2}$, כלומר השטח מתחת לפונקציה בין 0 לאיזשהו

t הוא $1-e^{-t^2}$. לכן השטח מתחת לפונקציה בין 0 ל- A הוא פשוט $1-e^{-A^2}$. אנו רוצים למצוא את A כך ששטח זה הוא ½ :

$$\int_0^A 2xe^{-x^2}dx = 1-e^{-A^2} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-A^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow -A^2 = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow A^2 = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2 \Rightarrow A = \sqrt{\ln 2}$$

וסיימנו.

<u>פתרון לתרגילון</u> חישוב $\int 2xe^{-x^2}dx$.

הגורם המפריע בחישוב האינטגרל הוא החזקה של האקספוננט, $-x^2$.
ננסה לפיכך את ההצבה:

$$s = -x^2$$

$$\frac{ds}{dx} = -2x \Rightarrow ds = -2xdx$$

נציב ונקבל:

$$\int 2xe^{-x^2}dx = \int -e^s ds = -e^s = -e^{-x^2}$$

■

בדיקת התכנסות של אינטגרל מוכלל

שתי תוצאות חשובות מאד בעבודתינו עם אינטגרלים מוכללים מוחבאות בספר הלימוד ב**שאלות 48-50 בסעיף 10.1**. תוצאות אלה הן משפטים שניתן להשתמש בהם ללא נימוק נוסף, ואלו הם:

משפט 1

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ **מתכנס** לכל $p>1$ וערכו $\frac{1}{p-1}$, **ומתבדר** לכל $p \le 1$.

משפט זה שימושי מאד שכן הוא מאפיין לנו עבור משפחה שלמה של פונקציות – כל פונקציה מהצורה $\frac{1}{x^p}$ - האם האינטגרל המוכלל שלה מתכנס או מתבדר (ואפילו נותן את ערך האינטגרל במקרה בו הוא מתכנס).

כך למשל, נוכל לנמק מעתה בקלות התכנסות או התבדרות של אינטגרלים רבים בשורה אחת וללא כל חישוב, כך למשל:

* $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס – פונ' מהצורה $\frac{1}{x^p}$ עבור $p=2$ ← $p>1$ ← האינטגרל **מתכנס**.
* $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתבדר – פונ' מהצורה $\frac{1}{x^p}$ עבור $p=1/2$ ← $p\le 1$ ← האינטגרל **מתבדר**.

למעשה ניתן להשתמש בתוצאה גם אם האינטגרל שלנו הוא וריאציה קלה על פונקציה מהצורה $\frac{1}{x^p}$. מה הכוונה ב"קלה"? – כזו שלא משפיעה על התכנסות או התבדרות, למשל **כפל בקבוע**:

* $\int_1^\infty \frac{5}{x^3}dx$ מתכנס, שכן $\int_1^\infty \frac{5}{x^3}dx = 5\cdot\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx}_{\text{מתכנס}}$. כפל בקבוע של אינטגרל מתכנס – מתכנס.

* $\int_1^\infty \frac{1}{3x}dx$ מתבדר, שכן $\int_1^\infty \frac{1}{3x}dx = \frac{1}{3}\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$. כפל בקבוע של אינטגרל מתבדר – מתבדר.

מתבדר

אם כן, כפל בקבוע לא משפיע על התכנסות או התבדרות של אינטגרל שכן ההשפעה של כפל בקבוע על השטח מתחת לגרף הפונ' היא שהשטח מוכפל באותו קבוע – לכן אם הוא היה סופי מלכתחילה, גם אם נכפיל אותו בקבוע הוא יישאר סופי, ואם הוא היה אינסופי הוא יישאר אינסופי.

עוד דבר שלא משפיע על התכנסות\התבדרות של אינטגרל הוא הגבול התחתון שלו.

כך למשל, מכך ש- $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ מתכנס נוכל להסיק שגם $\int_3^\infty \frac{1}{x^3}dx$ מתכנס.

ומכך ש- $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתבדר, נסיק שגם $\int_{100}^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתבדר.

<u>במקרה הראשון</u> הסיבה ברורה: השטח $\int_3^\infty \frac{1}{x^3}dx$ מוכל בשטח $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ ולכן בוודאות קטן ממנו.

מכך, כיוון שאנו יודעים שהשטח הגדול, $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$, סופי, אז וודאי ש- $\int_3^\infty \frac{1}{x^3}dx$ סופי ולכן מתכנס.

<u>במקרה השני</u> הנימוק עדין יותר: אנו יודעים כי $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתבדר, אך השטח $\int_{100}^\infty \frac{1}{x^3}dx$ הוא שטח קטן יותר – מה מבטיח לפיכך שהוא בוודאות אינסופי? הסיבה לכך היא שע"י שינוי הגבול התחתון השפענו על השטח רק "השפעה סופית", הורדנו ממנו את חלק השטח בין 1 ל- 100 שהוא בוודאי שטח מוגדר וסופי. לכן אם השטח בין 1 לאינסוף הוא אינסופי, העובדה שחיסרנו ממנו כמות שטח סופית לא יכולה להפוך אותו לסופי, לכן גם השטח מ- 100 לאינסוף הוא אינסופי.

כוחו של משפט 1 לעיל עולה פי עשרות מונים, בצירוף עם המשפט הבא, המהווה הכללה למשפט 5.6.7 עבור אינטגרל אינסופי.

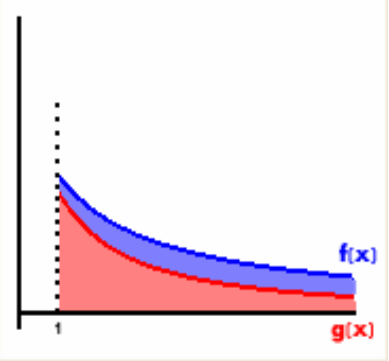
בעזרת משפט זה, נוכל לאפיין התכנסות או התבדרות של אינטגרלים של פונקציות רבות שאינן בדיוק מהצורה $\frac{1}{x^p}$ על ידי <u>השוואתן</u> לפונקציות מהצורה הזו. והנה המשפט:

משפט 2

אם f,g חיוביות ומקיימות $f(x)\ge g(x)$ לכל x בקטע $[1,\infty)$ אז:

א) אם $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_1^\infty g(x)dx$ מתכנס, ומתקיים $\int_1^\infty g(x)dx \le \int_1^\infty f(x)dx$.

ב) אם $\int_1^\infty g(x)dx$ מתבדר אז גם $\int_1^\infty f(x)dx$ מתבדר.



מסעיף א' במשפט - אם עבור פונקציה מסוימת $g(x)$ אנו יודעים להצביע על פונקציה $f(x)$ **גדולה יותר שהאינטגרל שלה מתכנס**, אז נוכל להסיק שגם האינטגרל של $g(x)$ מתכנס (שכן השטח מתחתיה – האדום – מוכל בשטח הכחול – הסופי)

ומסעיף ב' במשפט - אם עבור פונקציה מסוימת $f(x)$ אנו יודעים להצביע על פונקציה $g(x)$ **קטנה יותר שהאינטגרל שלה מתבדר**, אז נוכל להסיק שגם האינטגרל של $f(x)$ מתבדר (שכן השטח הכחול גדול מהשטח האדום – שהוא כבר אינסופי).

ומאיפה נמצא פונקציות כאלה? כאן יבוא לעזרתנו **משפט 1**, נשאף למצוא פונ' מהצורה $1/x^p$ (או, באופן כללי יותר, עד כדי כפל בקבוע - C/x^p) שתהיה גדולה\קטנה יותר מהפונקציה שאנו בודקים (בהתאם לאם אנו רוצים להוכיח התכנסות\התבדרות בהתאמה), שכן עבור פונקציות כאלה נוכל לנמק בקלות וללא חישוב את התכנסות\התבדרות האינטגרל.

דוגמה

נניח כי אנו רוצים לבדוק אם $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$ מתכנס. אם נוכל להצביע על פונקציה, הגדולה יותר מ- $\frac{1}{x^3+1}$ בקטע $[1,\infty)$ ושאנו יודעים שהאינטגרל שלה מתכנס, נוכל לפי משפט 2 להסיק, שגם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$ מתכנס. כלומר, בדומה למשפט 5.6.7, נציע את סכמת ההוכחה הבאה:

תבנית להוכחת התכנסות של אינטגרל

על מנת להוכיח: $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$ מתכנס.

(*) נראה כי בקטע $[1,\infty)$: $\frac{1}{x^3+1} \le \square$.

(**) ונסיק ממשפט 2 ומכך ש- $\int_1^\infty \square\, dx.$ מתכנס שגם $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$ מתכנס

כל הרעיון הוא "למלא את הריבועים" בפונקציה שמקיימת את אי השיוויון (*) כלומר גדולה יותר מהפונקציה שלנו, ושאנו יודעים שהאינטגרל שלה מתכנס.

במקרה שלנו הבחירה היא קלה: אם "נזרוק" את ה- 1+ מהמכנה של $\frac{1}{x^3+1}$ הרי נקטין בכך את המכנה, ולכן נגדיל בכך את המספר, ומכאן נקבל כי (*) מתקיים:

$$\frac{1}{x^3+1} \le \frac{1}{x^3}$$

וכיוון שלפי משפט 1 אנו יודעים כי $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ מתכנס, הרי מצאנו פונקציה גדולה יותר מהפונקציה שלנו שהאינטגרל שלה מתכנס, ולכן גם $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$ מתכנס, כנדרש. ■

תרגיל 2

א) הוכח כי $\int_1^\infty \frac{2}{\sqrt{x^4+1}}dx$ מתכנס

ב) מצא מספרים חיוביים A,B כך ש- $A \le \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx \le B$

פתרון 2

<u>פתרון סעיף א'</u>: שוב אנו רוצים להוכיח התכנסות לכן עלינו לחסום מלמעלה את הפונקציה $\frac{2}{\sqrt{x^4+1}}$ ולהביאה לצורה של C/x^p, עבור p שאנו יודעים שהאינטגרל עבורו מתכנס.

נזכור, בדומה למשפט 5.6.7, כאשר הביטוי הוא מהצורה מונה\מכנה ה"פעולות החוקיות" שאנו יכולים לעשות על הביטוי על מנת להגדילו (שכן אנחנו רוצים לקבל פונקציה חדשה גדולה יותר) הן **להגדיל את המונה** או **להקטין את המכנה**.
אם כך המטרה שלנו היא לקחת את הביטוי שלנו, וע"י פעולות שמגדילות את המונה שלו או מקטינות את המכנה שלו, להגיע לביטוי מהצורה C/x^p. גם כאן המטרה מושגת בפשטות:

$$\frac{2}{\sqrt{x^4+1}} \le \frac{2}{\sqrt{x^4}} = \frac{2}{x^2} \leftarrow$$ אינטגרל **מתכנס** (p=2)

ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

<u>פתרון סעיף ב'</u>: כאן אנו נדרשים לחלק הכמותי שבמשפט 2, נתחיל מהקבוע B שאת החסימה הנחוצה עבורו כבר מצאנו בסעיף א'. מסעיף א' ראינו:

$$\frac{2}{\sqrt{x^4+1}} \le \frac{2}{x^2}$$

ולכן:

$$\int_1^\infty \frac{2}{\sqrt{x^4+1}}dx \le \int_1^\infty \frac{2}{x^2}dx = 2\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 2\cdot\frac{1}{2-1} = 2$$

לפיכך נבחר $\boxed{B=2}$. (המעבר האחרון לפי הנוסחה ממשפט 1, $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}$ עבור p>1).

כדי למצוא חסם תחתון A מתאים עלינו לחסום את האינטגרל מהכיוון השני (ע"י אינטגרל מתכנס קטן יותר). במקרה זה מותר לנו **להקטין את המונה** או **להגדיל את המכנה**, לכן לא נוכל כמו מקודם "לזרוק" את ה- 1+, נשתמש בטריק הנפוץ השני והוא להחליף את ה- 1+ בחזקה הגבוהה ביותר - x^4 - בכך אנו מגדילים את המכנה <u>מבלי לשנות את סדר הגודל שלו</u>:

$$\frac{2}{\sqrt{x^4+1}} \ge \frac{2}{\sqrt{x^4+x^4}} = \frac{2}{\sqrt{2x^4}} = \frac{\sqrt{2}}{x^2}$$

ולכן:

$$\int_1^\infty \frac{2}{\sqrt{x^4+1}}dx \ge \int_1^\infty \frac{\sqrt{2}}{x^2}dx = \sqrt{2}\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2-1} = \sqrt{2}$$

נבחר $\boxed{A=\sqrt{2}}$ וסיימנו. ■

כיצד נדע איך לחסום את האינטגרל שלנו?

מלבד להכיר את הטריקים הנפוצים, העיקרון המנחה בכל חסימה של אינטגרל צריך להיות לא לשנות את סדר הגודל של הביטויים השונים.

נסתכל על דוגמה פשוטה כדי להבהיר את הכוונה: נניח כי אנו רוצים להוכיח כי $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}dx$ מתכנס. אנו רוצים לחסום אינטגרל זה מלמעלה, כלומר להקטין את המכנה, ולהגיע לאינטגרל פשוט מהצורה $1/x^p$. יש לנו כאן לכאורה 2 אפשרויות לפישוט המכנה. אנו יכולים לזרוק את ה- x או לזרוק את ה- x^2.

באפשרות הראשונה, אם נזרוק את ה- x^2, כלומר נחסום:

$$\frac{1}{x^2+x} \le \frac{1}{x}$$

נשפיע בכך על סדר הגודל של המכנה, שכן לפני הזריקה במכנה היה רשום פולינום מסדר גודל ריבועי - 2, ואילו אחרי הזריקה ניוותר עם x - מסדר גודל לינארי – 1.

יתרה מכך, בחירה עגומה זו תגרום לכך שהוכחתינו תיכשל כי כעת הביטוי שחסמנו איתו, $\frac{1}{x}$, הוא אינטגרל מתבדר לכן בעצם חסמנו את האינטגרל שלנו מלמעלה על ידי אינטגרל מתבדר – וזה לא מוכיח דבר.

באפשרות השניה, סדר הגודל של הביטוי לא משתנה:

$$\frac{1}{x^2+x} \le \frac{1}{x^2}$$

מכנה ריבועי נשאר מכנה ריבועי, והוכחתנו צולחת: $\frac{1}{x^2}$ הוא אינטגרל מתכנס, ולכן לפי משפט 2 גם $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}dx$ מתכנס.

תרגיל 3

בדוק את התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4+x+2}}dx$.

פתרון 3

בתרגיל זה התווספה דרגת קושי לפתרון שכן לא נתון לנו בשאלה אם האינטגרל מתכנס או מתבדר. לכן עלינו תחילה לקבל תחושה האם האינטגרל מתכנס או מתבדר ורק אז לנסות ולחסום אותו בכיוון המתאים על מנת להוכיח זאת.

כדי לקבל את התחושה, הרעיון הוא שוב להתמקד בסדרי גודל ולהתעלם מאלמנטים "זניחים". כך, הביטוי x^4+x+2 הוא מסדר גודל של x^4 (שאר הרכיבים בפולינום זניחים עבור ערכי x גדולים) והמונה, $x+1$, הוא מסדר גודל של x ולכן הביטוי כולו מתנהג כמו:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^4+x+2}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^4}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

כלומר הביטוי כולו הוא מסדר גודל של $\frac{1}{x}$ ולכן **נצפה** כי הוא יתבדר. חשוב להדגיש כי קביעה זו אינה מהווה עדיין הוכחה פורמלית להתבדרות.

כעת, כשתפסנו כיוון, כדי **להוכיח** שהאינטגרל מתבדר, נשתמש בסעיף השני של משפט 2 - נחסום את האינטגרל שלנו מלמטה ע״י אינטגרל מתבדר:

תבנית להוכחת התבדרות של אינטגרל

על מנת להוכיח: $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4+x+2}}dx$ מתבדר.

(*) נראה כי בקטע $[1,\infty)$: $\frac{x+1}{\sqrt{x^4+x+2}} \geq \square$.

(**) ונסיק ממשפט 2 ומכך ש- $\int_1^\infty \square\, dx.$ מתבדר שגם $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4+x+2}}dx$ מתבדר.

כדי לחסום מלמטה עלינו **להקטין את המונה** או **להגדיל את המכנה**. נשתמש בטריקים הקבועים: נזרוק את ה- 1 במונה, ונחליף את האיברים במכנה בחזקה הגבוהה ביותר:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^4+x+2}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4+2x^4}} = \frac{x}{\sqrt{4x^4}} = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} \leftarrow$$ אינטגרל **מתבדר** (p=1)

ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר.

■

תרגיל

בדוק את התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty \frac{x+\sin x}{(x^2+1)^{1.5}}dx$ ■

תרגיל 4

לאילו ערכי n האינטגרל $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^n+1}}dx$ מתכנס?

פתרון 4

נתחיל בלנסות לחסום את האינטגרל שלנו מלמעלה. נשתמש בטריק הקבוע ונזרוק את ה- 1+ במכנה:

$$(*)\quad \frac{x}{\sqrt{x^n+1}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^n}} = \frac{x}{x^{0.5n}} = \frac{1}{x^{0.5n-1}}$$

כעת, אם $0.5n-1>1$ הרי האינטגרל החוסם שקיבלנו מתכנס, ולכן גם האינטגרל המבוקש מתכנס. מכן נקבל את התנאי:

$$0.5n-1>1 \Rightarrow 0.5n>2 \Rightarrow n>4$$

וקיבלנו כי עבור $n>4$ **האינטגרל מתכנס**.

נקודת המפתח בתרגיל זה היא שבזאת **לא סיימנו את פתרונו**. הראינו על ידי חסימה מסוימת שביצענו כי עבור $n>4$ האינטגרל מתכנס, אך תיאורטית, עדיין ייתכנו ערכי n נוספים עבורם האינטגרל מתכנס – שכן כל ההוכחה מעלה לא מוכיחה שום דבר למקרה ש- $n\leq 4$.

עבור $n \le 4$, הביטוי שהגענו אליו, $\frac{1}{x^{0.5n-1}}$, הוא אמנם אינטגרל מתבדר, אבל החסימה (*) מראה שהאינטגרל שלנו **קטן** מ- $\frac{1}{x^{0.5n-1}}$, לפיכך לא נוכל להסיק התבדרות של האינטגרל שלנו מתוך התבדרות החסם. לצורך הוכחת התבדרות עלינו לחסום בכיוון השני ולהראות שעבור $n \le 4$ האינטגרל המבוקש **גדול** יותר מאינטגרל מתבדר.

לפיכך כדי להשלים את הפתרון נחסום את הביטוי בכיוון ההפוך, בדרך הקבועה:

$$\frac{x}{\sqrt{x^n+1}} \ge \frac{x}{\sqrt{x^n+x^n}} = \frac{x}{\sqrt{2x^n}} = \frac{x}{\sqrt{2}x^{0.5n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{0.5n-1}}$$

וכעת, בכיוון זה נוכל להסיק שעבור $0.5n-1 \le 1$, היינו $n \le 4$, האינטגרל החוסם שקיבלנו מתבדר, ולכן גם האינטגרל המבוקש מתבדר.

לסיכום, הראינו שעבור $n > 4$ האינטגרל מתכנס ועבור $n \le 4$ האינטגרל מתבדר, ומכאן האינטגרל מתכנס עבור $n > 4$ בלבד.

■

כלל לופיטל

מדובר בנושא טכני פשוט. להסבר ודוגמאות פתורות קיראו ב**יחידות הלימוד עמ' 586-589**.
בעמודים אלה הכלל מנוסח לגבולות מהצורה 0/0, נציין רק שבעמ' 594 מוכלל הכלל והוא תקף גם לגבולות מהצורה ∞/∞ (כלומר גם מונה וגם מכנה שואפים לאינסוף).
לסיום לימוד הנושא קיראו גם ב**יחידות הלימוד עמ' 594-597** את דוגמאות 1,3,6,7.

סיימנו את החומר הדרוש לממ"ן 15